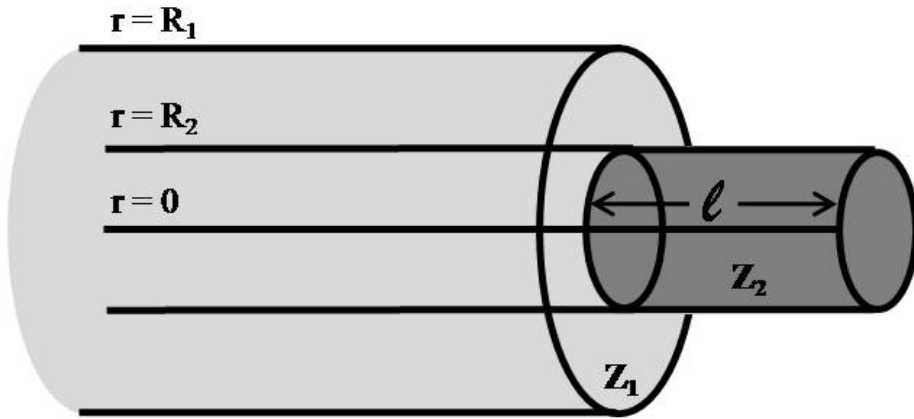


1 GİRİŞ

Yaşadığımız çevrede bizi etkileyen kirliliklerden birisi de gürültü kirliliğidir. Son yıllarda ulaşım araçlarının sayısındaki artış, beraberinde gürültü kirliliğinin artmasına ivme kazandırmıştır. Özellikle uçak motorlarından yayılan gürültünün azaltılması önemli bir problem olarak araştırmacıların ilgi odağı olmuştur. Bu nedenle çeşitli araştırmalar yapılmış ve gürültüyü azaltma adına bazı yöntemler bulunmuştur. Bu yöntemlerden birisi de silindirik boruyu akustik yutucu malzeme ile kaplamaktır. Öncelikle silindirik borunun sonsuz uzunluklu hali göz önüne alınıp iç yüzeyi yutucu malzeme ile kaplanmıştır [1-4]. Oysa bu silindirik boruların sonlu uzunluklu olması pratik açıdan daha uygundur. İç yüzeyi akustik yutucu bir malzeme ile kaplı yarı sonsuz silindirik bir borudan ses dalgalarının radyasyonu Rawlins tarafından incelenmiştir [5]. Bu çalışmaların hepsi akışkanın durağan olduğu ortam için yapılmıştır. Akışkanın durağan olmadığı ortamda yapılan incelemeler ise daha gerçekçi sonuçlar vermektedir. Munt, yarı sonsuz silindirik bir borudan çıkan subsonik jetle sesin etkileşimini Wiener-Hopf metodu ile çözmüştür [6]. Daha sonraları Demir ve Rienstra, koaksiyal boruda sesin radyasyonunu incelemiştir [7]. Bu incelemede, dıştaki silindirik borunun yarı sonsuz, iç ve dış yüzeylerinin rijid, içteki silindirik borunun ise sonsuz ve akustik yutucu malzeme ile kaplı olduğu varsayılmıştır. Ardından, bu çalışmaya benzer fakat farklı akustik yutucu malzemeye kaplı koaksiyal borudan sesin radyasyonunu incelemişlerdir (dıştaki silindirik boru içten kaplı, Z_d empedansı ile ve içteki $z > 0$ için dıştan kaplı, Z_h empedansı ile ele alınmıştır.) [9].

Bu çalışmada, ρ_0 yoğunluğuna sahip durağan bir akışkan ve ses hızının c_0

olduğu ortamda, yarı sonsuz silindirik bir boru uçak motorunun matematiksel bir modeli olarak ele alınmış olup dış yüzeyindeki akustik yutucu kaplamanın ses yayılımına etkisi araştırılacaktır. Bu olay bir sınır-değer problemi olarak modelleneyecek ve çözümü ise bilinen bir metot olan Wiener-Hopf yöntemi kullanılarak analitik olarak elde edilecektir. Bu analitik çözümün sayısal olarak bazı grafiklerle gösterilmesi neticesinde, akustik yutucu malzemenin ses yayılımına etkisi yorumlanabilecektir. Aslında bu problem koaksiyal olarak ele alınıp, dıştaki yarı sonsuz silindirik borunun iç yüzeyi ve içteki borunun ise $z > 0$ için l uzunluğuna sahip kısmının dış yüzeyi farklı yutucu malzemeyle kaplanarak düşünölmüştür (Şekil 1.1). Bu tezde yaptığımız çalışma ise $z = 0$ daki ayrıtların $-\infty$ a gönderilmesiyle elde edilmiştir.

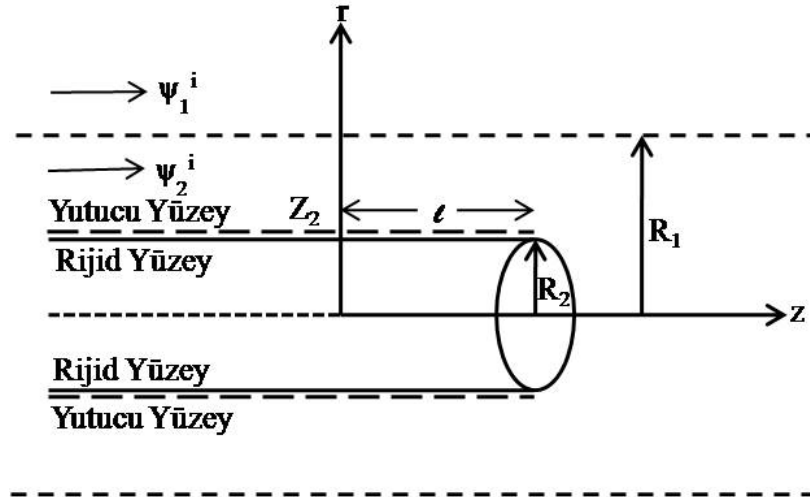


Şekil 1.1 Asıl Problemin Geometrisi

2 PROBLEMİN FORMULASYONU VE ÇÖZÜMÜ

2.1 Problemin Formulasyonu

Zaman bağıllığı $e^{i\omega t}$ şeklinde olan harmonik düzlemsel ses dalgasının z yönünde yarı sonsuz uzanan dairesel silindirik bir borudan radyasyonunu ele alalım. Bu dairesel boru sonsuz ince kalınlığa sahip olup uzaysal bölgede $\{r = R_2, z \in (-\infty, l)\}$ şeklinde tanımlı olup burada (r, θ, z) genel silindirik kutupsal koordinatları göstermektedir (Şekil 2.1). Silindirin dış yüzeyi akustik yutucu bir malzemeye kaplanmıştır. Borunun dış yüzeyindeki kaplamanın Z_2 empedansı ile, önceki çalışmadan ise dıştaki borunun iç yüzeyindeki kaplamanın Z_1 empedansı ile gösterimi ele alınmıştır. Silindirin iç yüzeyinin ise rijid olduğu varsayılacaktır. Gelen dalganın ve problemin geometrisinin simetrik olmasından ötürü akustik alan her yerde θ dan bağımsız olacaktır. Bu yüzden bize akustik basınç ve hızı sırasıyla $p = -\frac{\partial}{\partial t}\rho_0\psi$ ve $\vec{v} = \text{grad } \psi$ şeklinde tanımlamamıza olanak sağlayacak $\psi(r, z, t)$ skaler potansiyelini kullanmamız yerinde olacaktır. Burada ρ_0 dış ortamın yoğunluğunu, zaman bağımlılığında gözükken ω ise açısal frekansı göstermektedir.



Şekil 2.1 Problemin Geometrisi

Ayrıca R_1, ρ_0 ve c_0 kullanılarak bütün büyüklükler boyutsuz hale getirilmiştir.

$$r, z \sim R_1 \quad , \quad p \sim \rho_0 \quad , \quad \omega \sim R_1/c_0 \quad (2.1)$$

Analitik uygunluk için çevredeki ortamın biraz kayıplı, yani ω nın çok küçük negatif sanal bir kısma sahip olduğunu farz edeceğiz. Kayıpsız durum ise analiz sonunda $\text{Im } \omega \rightarrow 0$ yapılarak elde edilecektir. Probleme ilişkin toplam alanı değişik bölgelerde,

$$\psi^T(r, z, t) = \begin{cases} \psi_1(r, z) \exp(i\omega t) + \psi_1^i(r, z) \exp(i\omega t) & ; \quad r > 1, z \in (-\infty, \infty) \\ \psi_2(r, z) \exp(i\omega t) + \psi_2^i(r, z) \exp(i\omega t) & ; \quad r \in (h, 1), z \in (-\infty, \infty) \\ \psi_3(r, z) \exp(i\omega t) & ; \quad r \in (0, h), z \in (-\infty, \infty) \end{cases} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlamak uygun olacaktır. Burada $h = R_2/R_1$ dir. $\psi_1(r, z)$, $\psi_2(r, z)$ ve $\psi_3(r, z)$ ise geçerli bölgede saçılan alanı ifade etmektedir. $\psi_1^i(r, z)$ ve $\psi_2^i(r, z)$ gelen dalgaları da bir önceki çalışmadan elde edilen saçılan alanların probleme uyarlanmasıyla elde edilmiş olup,

$$\psi_1^i(r, z) = -\frac{\omega}{2\pi} \int_L \frac{F_+(u) H_0^{(2)}(\lambda\omega r)}{\lambda\omega H_1^{(2)}(\lambda\omega)} e^{-i\omega uz} du \quad (2.3a)$$

ve

$$\psi_2^i(r, z) = \frac{\pi h Z_2 \omega}{2i} \frac{1}{2\pi} \int_L \Phi_+(u) [Y(Z_2, u) J_0(\lambda\omega r) - J(Z_2, u) Y_0(\lambda\omega r)] e^{-i\omega uz} du \quad (2.3b)$$

biçimindedir. Burada $\Phi_+(u)$ ve $F_+(u)$ bilinen fonksiyonlardır. Ayrıca uygunluk açısından,

$$J(Z_2, u) = -iJ_0(\lambda\omega h)/Z_2 - \lambda J_1(\lambda\omega h) \quad (2.4a)$$

$$Y(Z_2, u) = -iY_0(\lambda\omega h)/Z_2 - \lambda Y_1(\lambda\omega h) \quad (2.4b)$$

$$H(Z_2, u) = [J(Z_2, u) - iY(Z_2, u)] = -iH_0^{(2)}(\lambda\omega h)/Z_2 - \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega h) \quad (2.4c)$$

$$J(Z_1, u) = iJ_0(\lambda\omega)/Z_1 - \lambda J_1(\lambda\omega) \quad (2.5a)$$

$$Y(Z_1, u) = iY_0(\lambda\omega)/Z_1 - \lambda Y_1(\lambda\omega) \quad (2.5b)$$

olarak tanımlamak uygun olacaktır.

2.2 Wiener-Hopf Denklem Sisteminin Türetilmesi

$\psi_1(r, z)$, $\psi_2(r, z)$ ve $\psi_3(r, z)$ alanları

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \right] \psi_j(r, z) = 0 \quad , \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.6)$$

ile verilen Helmholtz denklemini sağlarlar. z yönünde Fourier dönüşümü alınarak bu denklemlerden aşağıdaki çözümler bulunur.

$$\psi_1(r, z) = \frac{\omega}{2\pi} \int_L A(u) H_0^{(2)}(\lambda\omega r) e^{-i\omega uz} du \quad (2.7a)$$

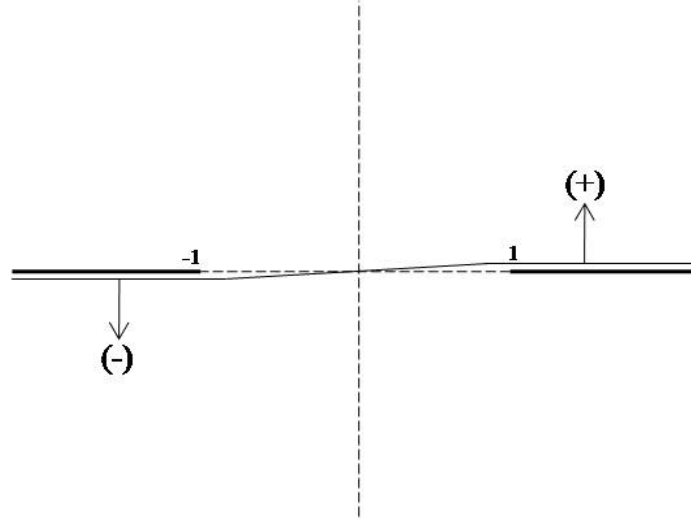
$$\psi_2(r, z) = \frac{\omega}{2\pi} \int_L [B(u) J_0(\lambda\omega r) + C(u) Y_0(\lambda\omega r)] e^{-i\omega uz} du \quad (2.7b)$$

$$\psi_3(r, z) = \frac{\omega}{2\pi} \int_L D(u) J_0(\lambda\omega r) e^{-i\omega uz} du \quad (2.7c)$$

Burada L , kompleks u düzleminin içinde yer alan, reel eksen boyunca veya yakınında uzanan uygun bir ters fourier dönüşüm eğrisidir (Şekil 2.2).

$A(u)$, $B(u)$, $C(u)$ ve $D(u)$ bulunması gereken spektral katsayılarıdır. J_0 ve Y_0 sıfıncı mertebeden Bessel ve Neumann fonksiyonlarıdır. $H_0^{(2)} = J_0 - iY_0$ ise ikinci türden Hankel fonksiyonudur. λ karakök fonksiyonu ise aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\lambda(u) = \sqrt{1 - u^2} \quad (2.8)$$



Şekil 2.2 Kompleks u-düzlemi

Ayrıca ψ_1, ψ_2 ve ψ_3 alanlarının belirlenmesinde gerekli olacak sınır ve süreklilik koşullarını problemin geometrisinden faydalanarak aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\frac{\partial}{\partial r} \psi_2(h, z) = \frac{i\omega}{Z_2} \psi_2(h, z), \quad z < l \quad (2.9a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \psi_3(h, z) = 0, \quad z < l \quad (2.9b)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} [\psi_2(h, z) + \psi_2^i(h, z)] - \frac{\partial}{\partial r} \psi_3(h, z) = 0, \quad z > l \quad (2.9c)$$

$$[\psi_2(h, z) + \psi_2^i(h, z)] - \psi_3(h, z) = 0, \quad z > l \quad (2.9d)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \psi_1(1, z) = \frac{\partial}{\partial r} \psi_2(1, z), \quad -\infty < z < \infty \quad (2.9e)$$

$$\psi_1(1, z) = \psi_2(1, z), \quad -\infty < z < \infty \quad (2.9f)$$

Ayrıca çözümün tekliğini garantileyebilmek için $r = h, z = l$ de aşağıdaki ayrıt koşulu geçerlidir.

$$\psi_{2,3}(h, l) = \text{sabit} \quad (2.10a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \psi_{2,3}(h, l) = \mathcal{O}(z^{-1/2}) \quad (2.10b)$$

O halde (2.9a) ve (2.9b) sınır koşullarından sırasıyla,

$$-\frac{\omega}{2\pi} \int_L \omega \{B(u) J(Z_2, u) + C(u) Y(Z_2, u)\} e^{-i\omega uz} du = 0 \quad (2.11a)$$

$$-\frac{\omega}{2\pi} \int_L D(u) \lambda \omega J_1(\lambda \omega h) e^{-i\omega uz} du = 0 \quad (2.11b)$$

bulunur. Fourier dönüşümü aldığımızda,

$$-\omega [B(u) J(Z_2, u) + C(u) Y(Z_2, u)] = e^{i\omega ul} \Phi_1^+(u) \quad (2.12a)$$

$$-D(u) \lambda \omega J_1(\lambda \omega h) = e^{i\omega ul} \Phi_2^+(u) \quad (2.12b)$$

elde edilir. $\Phi_1^+(u)$ ve $\Phi_2^+(u)$ ise aşağıdaki gibidir.

$$\Phi_1^+(u) = \int_l^\infty \left[\frac{i\omega}{Z_2} \psi_2(h, z) - \frac{\partial}{\partial r} \psi_2(h, z) \right] e^{i\omega u(z-l)} dz \quad (2.13a)$$

$$\Phi_2^+(u) = \int_l^\infty \frac{\partial}{\partial r} \psi_3(h, z) e^{i\omega u(z-l)} dz \quad (2.13b)$$

(2.9c) ve (2.9d) süreklilik koşullarından sırasıyla,

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{2\pi} \int_L [-D(u) \lambda \omega J_1(\lambda \omega h) + B(u) \lambda \omega J_1(\lambda \omega h) + \\ C(u) \lambda \omega Y_1(\lambda \omega h) - \Phi_+(u)] e^{-i\omega uz} du = 0 \end{aligned} \quad (2.14a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{2\pi} \int_L [D(u) J_0(\lambda \omega h) - B(u) J_0(\lambda \omega h) - \\ C(u) Y_0(\lambda \omega h) - \frac{Z_2}{i\omega} \Phi_+(u)] e^{-i\omega uz} du = 0 \end{aligned} \quad (2.14b)$$

bulunur. Fourier dönüşümü aldığımızda,

$$\begin{aligned} -D(u) \lambda \omega J_1(\lambda \omega h) + B(u) \lambda \omega J_1(\lambda \omega h) + \\ C(u) \lambda \omega Y_1(\lambda \omega h) - \Phi_+(u) = e^{i\omega ul} \Phi_1^-(u) \end{aligned} \quad (2.15a)$$

$$D(u) J_0(\lambda\omega h) - B(u) J_0(\lambda\omega h) -$$

$$C(u) Y_0(\lambda\omega h) - \frac{Z_2}{i\omega} \Phi_+(u) = e^{i\omega u l} \Phi_2^-(u) \quad (2.15b)$$

elde edilir. $\Phi_1^-(u)$ ve $\Phi_2^-(u)$ ise aşağıdaki gibidir.

$$\Phi_1^-(u) = \int_{-\infty}^l \left[\frac{\partial}{\partial r} \psi_3(h, z) - \frac{\partial}{\partial r} \psi_2(h, z) - \frac{\partial}{\partial r} \psi_2^i(h, z) \right] e^{i\omega u(z-l)} dz \quad (2.16a)$$

$$\Phi_2^-(u) = \int_{-\infty}^l [\psi_3(h, z) - \psi_2(h, z) - \psi_2^i(h, z)] e^{i\omega u(z-l)} dz \quad (2.16b)$$

(2.9e) ve (2.9f) süreklilik koşullarından ise sırasıyla,

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_L A(u) \lambda\omega H_1^{(2)}(\lambda\omega) e^{-i\omega uz} du =$$

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_L [B(u) \lambda\omega J_1(\lambda\omega) + C(u) \lambda\omega Y_1(\lambda\omega)] e^{-i\omega uz} du \quad (2.17a)$$

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_L A(u) H_0^{(2)}(\lambda\omega) e^{-i\omega uz} du =$$

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_L [B(u) J_0(\lambda\omega) + C(u) Y_0(\lambda\omega)] e^{-i\omega uz} du \quad (2.17b)$$

bulunur. Fourier dönüşümü aldığımızda,

$$A(u) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) = [B(u) \lambda J_1(\lambda\omega) + C(u) \lambda Y_1(\lambda\omega)] \quad (2.18a)$$

$$A(u) H_0^{(2)}(\lambda\omega) = [B(u) J_0(\lambda\omega) + C(u) Y_0(\lambda\omega)] \quad (2.18b)$$

elde ederiz. Buradan ise,

$$B(u) = A(u) \quad (2.19a)$$

$$C(u) = -iA(u) \quad (2.19b)$$

olarak bulunur. (2.12a) ve (2.12b) sınırlar ilişkilerinden,

$$A(u) = -\frac{e^{i\omega u} \Phi_1^+(u)}{\omega H(Z_2, u)} \quad (2.20a)$$

$$D(u) = -\frac{e^{i\omega u} \Phi_2^+(u)}{\lambda \omega J_1(\lambda \omega h)} \quad (2.20b)$$

ifadelerine ulaşırız. (2.15a) ve (2.15b) süreklilik ilişkilerinden $\Phi_+(u)$ yok edilirse,

$$-\omega D(u) J(Z_2, u) + [\omega B(u) J(Z_2, u) + \omega C(u) Y(Z_2, u)] = e^{i\omega u} \left[\frac{i\omega}{Z_2} \Phi_2^-(u) - \Phi_1^-(u) \right] \quad (2.21)$$

bulunur. Diğer bir ifadeyle,

$$e^{i\omega u} \Phi_2^+(u) + \omega A(u) \lambda H_1^{(2)}(\lambda \omega h) - \Phi_+(u) = e^{i\omega u} \Phi_1^-(u) \quad (2.22a)$$

$$-e^{i\omega u} \Phi_2^+(u) \frac{J_0(\lambda \omega h)}{\lambda \omega J_1(\lambda \omega h)} - A(u) H_0^{(2)}(\lambda \omega h) - \frac{Z_2}{i\omega} \Phi_+(u) = e^{i\omega u} \Phi_2^-(u) \quad (2.22b)$$

denklemlerinden $\Phi_+(u)$ yok edilirse,

$$\Phi_1^+(u) - \frac{J(Z_2, u)}{\lambda J_1(\lambda \omega h)} \Phi_2^+(u) = \left[\Phi_1^-(u) - \frac{i\omega}{Z_2} \Phi_2^-(u) \right] \quad (2.23)$$

ifadesine ulaşırız. (2.22b) ile (2.23) arasında $\Phi_2^+(u)$ yok edilirse,

$$-\Phi_1^+(u) \left[\frac{J_0(\lambda \omega h)}{J(Z_2, u)} - \frac{H_0^{(2)}(\lambda \omega h)}{H(Z_2, u)} \right] - \frac{Z_2}{i} e^{-i\omega u} \Phi_+(u) = - \left[\Phi_1^-(u) - \frac{i\omega}{Z_2} \Phi_2^-(u) \right] \frac{J_0(\lambda \omega h)}{J(Z_2, u)} + \omega \Phi_2^-(u) \quad (2.24)$$

elde edilir. Dolayısıyla elde edilen Wiener-Hopf denklem sistemi aşağıdaki gibidir.

$$\Phi_1^+(u) - \frac{J(Z_2, u)}{\lambda J_1(\lambda \omega h)} \Phi_2^+(u) = \left[\Phi_1^-(u) - \frac{i\omega}{Z_2} \Phi_2^-(u) \right] \quad (2.25)$$

$$-\frac{2i}{\pi \omega h} \frac{1}{J(Z_2, u) H(Z_2, u)} \Phi_1^+(u) - \frac{Z_2}{i} e^{-i\omega u} \Phi_+(u) = - \left[\Phi_1^-(u) - \frac{i\omega}{Z_2} \Phi_2^-(u) \right] \frac{J_0(\lambda \omega h)}{J(Z_2, u)} + \omega \Phi_2^-(u) \quad (2.26)$$

2.3 Wiener-Hopf Denklem Sisteminin Çözümü

(2.25) için,

$$\Phi_1^+(u) + L(u)\Phi_2^+(u) = \left[\Phi_1^-(u) - \frac{i\omega}{Z_2}\Phi_2^-(u) \right] \quad (2.27)$$

burada,

$$L(u) = -\frac{J(Z_2, u)}{\lambda J_1(\lambda\omega h)} = L_+(u)L_-(u) \quad (2.28)$$

şeklinde olup $L_+(u)$ ve $L_-(u)$ sırasıyla kompleks- u bandının üst ($\text{Im } u > 0$ ya da $\text{Im } u = 0$ ve $\text{Re } u < 0$) ve alt ($\text{Im } u < 0$ ya da $\text{Im } u = 0$ ve $\text{Re } u > 0$) yarı düzlemlerinde analitik ve sıfırları olmayan fonksiyonlardır (Bkz. Ek1). (2.27) yi $L_-(u)$ ile böler ve rezidü katkısını çıkarırsak,

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda J_1(\lambda\omega h)}{J(Z_2, u)}L_+(u)\Phi_1^+(u) - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p^+}{u - \xi_p^-} + L_+(u)\Phi_2^+(u) = \\ \frac{1}{L_-(u)} \left[\Phi_1^-(u) - \frac{i\omega}{Z_2}\Phi_2^-(u) \right] - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p^+}{u - \xi_p^-} \end{aligned} \quad (2.29)$$

burada,

$$d_p^+ = -L_+(\xi_p^-)\Phi_1^+(\xi_p^-) \lim_{u \rightarrow \xi_p^-} \frac{\lambda J_1(\lambda\omega h)}{\frac{d}{du}J(Z_2, u)} \quad (2.30)$$

biçimindedir ve ξ_p^- , $p = 1, 2, \dots$ (2.4a) nın üst yarı düzlemdeki sıfırlarıdır. (2.29)

dan Liouville teoremi yardımıyla,

$$\left[\Phi_1^-(u) - \frac{i\omega}{Z_2}\Phi_2^-(u) \right] = L_-(u) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p^+}{u - \xi_p^-} \quad (2.31)$$

elde edilir. (2.26) için,

$$\begin{aligned} M(u)\Phi_1^+(u) = \\ - \left[\Phi_1^-(u) - \frac{i\omega}{Z_2}\Phi_2^-(u) \right] \frac{J_0(\lambda\omega h)}{J(Z_2, u)} + \omega\Phi_2^-(u) + \frac{Z_2}{i}e^{-i\omega u} \Phi_+(u) \end{aligned} \quad (2.32)$$

burada,

$$M(u) = -\frac{2i}{\pi\omega h} \frac{1}{J(Z_2, u)H(Z_2, u)} = -\left\{ \frac{J_0(\lambda\omega h)}{J(Z_2, u)} - \frac{H_0^{(2)}(\lambda\omega h)}{H(Z_2, u)} \right\} = \frac{M_+(u)}{M_-(u)} \quad (2.33)$$

şeklinde olup $M_+(u)$ ve $M_-(u)$ üst ve alt yarı düzlemlerinde analitik ve sıfır olmayan fonksiyonlardır (Bkz. Ek1). Faktörizasyon sonunda,

$$M_+(u)\Phi_1^+(u) = -\left[\Phi_1^-(u) - \frac{i\omega}{Z_2}\Phi_2^-(u) \right] \frac{J_0(\lambda\omega h)}{J(Z_2, u)} M_-(u) + \omega\Phi_2^-(u)M_-(u) + \frac{Z_2}{i}e^{-i\omega u l}\Phi_+(u)M_-(u) \quad (2.34a)$$

ve dekompozisyonundan,

$$M_+(u)\Phi_1^+(u) = -\left[\Phi_1^-(u) - \frac{i\omega}{Z_2}\Phi_2^-(u) \right] \frac{J_0(\lambda\omega h)}{J(Z_2, u)} M_-(u) + \omega\Phi_2^-(u)M_-(u) + Q_+(u) + Q_-(u) \quad (2.34b)$$

bulunur. Burada,

$$Q(u) = \frac{Z_2}{i}e^{-i\omega u l}\Phi_+(u)M_-(u) = Q_+(u) + Q_-(u) \quad (2.35)$$

dur (Bkz. Ek2). (2.34b) den rezidü katkılarını çıkarırsak,

$$M_+(u)\Phi_1^+(u) - Q_+(u) - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p^-}{u - \xi_p^+} = -\left[\Phi_1^-(u) - \frac{i\omega}{Z_2}\Phi_2^-(u) \right] \frac{J_0(\lambda\omega h)}{J(Z_2, u)} M_-(u) - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p^-}{u - \xi_p^+} + \omega\Phi_2^-(u)M_-(u) + Q_-(u) \quad (2.36)$$

burada,

$$d_p^- = -M_-(\xi_p^+) \left[\Phi_1^-(\xi_p^+) - \frac{i\omega}{Z_2}\Phi_2^-(\xi_p^+) \right] \lim_{u \rightarrow \xi_p^+} \frac{J_0(\lambda\omega h)}{\frac{d}{du} J(Z_2, u)} \quad (2.37)$$

biçimindedir ve ξ_p^+ , $p = 1, 2, \dots$ (2.4a) nın alt yarı düzlemdeki sıfırlarıdır. (2.36)

dan Liouville teoremi yardımıyla,

$$M_+(u)\Phi_1^+(u) = Q_+(u) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p^-}{u - \xi_p^+} \quad (2.38)$$

elde edilir.

2.4 d_p^+ ve d_p^- Açılım Katsayılarının Belirlenmesi

(2.31) ve (2.38) de sırasıyla $u = \xi_r^+$ ve $u = \xi_r^-$ koyalım,

$$\left[\Phi_1^-(\xi_r^+) - \frac{i\omega}{Z_2} \Phi_2^-(\xi_r^+) \right] = L_-(\xi_r^+) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p^+}{\xi_r^+ - \xi_p^-} \quad (2.39a)$$

$$M_+(\xi_r^-)\Phi_1^+(\xi_r^-) = Q_+(\xi_r^-) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p^-}{\xi_r^- - \xi_p^+} \quad (2.39b)$$

bulunur ve her iki denklem düzenlenirse $r = 1, 2, \dots$ olmak üzere,

$$-\frac{1}{M_-(\xi_r^+) \lim_{u \rightarrow \xi_r^+} \frac{J_0(\lambda\omega h)}{\frac{d}{du} J(Z_2, u)}} d_r^- = L_-(\xi_r^+) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p^+}{\xi_r^+ - \xi_p^-} \quad (2.40a)$$

$$-\frac{M_+(\xi_r^-)}{L_+(\xi_r^-) \lim_{u \rightarrow \xi_r^-} \frac{\lambda J_1(\lambda\omega h)}{\frac{d}{du} J(Z_2, u)}} d_r^+ = Q_+(\xi_r^-) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p^-}{\xi_r^- - \xi_p^+} \quad (2.40b)$$

cebirsel denklem sisteminden d_r^+ , d_r^- katsayıları elde edilir. Burada,

$$-\frac{d}{du} J(Z_2, u) = iu\omega h \frac{J_1(\lambda\omega h)}{\lambda Z_2} - u\omega h J_0(\lambda\omega h) = iu\omega h \left[iJ_0(\lambda\omega h) + \frac{1}{Z_2 \lambda} J_1(\lambda\omega h) \right] \quad (2.41a)$$

$$-\frac{\frac{d}{du} J(Z_2, \xi_p^-)}{\lambda(\xi_p^-) J_1(\lambda(\xi_p^-)\omega h)} = i\xi_p^- \omega h \left[\frac{1}{Z_2 \lambda^2(\xi_p^-)} - Z_2 \right] \quad (2.41b)$$

$$-\frac{\frac{d}{du} J(Z_2, \xi_p^+)}{J_0(\lambda(\xi_p^+)\omega h)} = -\xi_p^+ \omega h \left[1 - \frac{1}{Z_2^2 \lambda^2(\xi_p^+)} \right] \quad (2.41c)$$

şeklindedir.

3 SAÇILAN ALANIN ANALİZİ

$r > 1$ bölgesindeki toplam alan (2.20a) yardımıyla,

$$\psi_1(r, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_L e^{i\omega u l} \Phi_1^+(u) \frac{H_0^{(2)}(\lambda\omega r)}{H(Z_2, u)} e^{-i\omega u z} du \quad (3.1)$$

olarak elde edilir. Ayrıca $H_0^{(2)}(z)$ nin $z \rightarrow \infty$ iken geçerli asimptotik ifadesi,

$$H_0^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z-\pi/4)} \quad (3.2)$$

göz önünde bulundurarak,

$$\psi_1(r, z) \sim -\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\Phi_1^+(u)}{H(Z_2, u)} \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda\omega r}} e^{-i(\lambda\omega r-\pi/4)} e^{-i\omega u(z-l)} du \quad (3.3)$$

elde edilir.

$$r = R \sin \theta \quad , \quad z - l = R \cos \theta \quad , \quad u = \cos(\theta - i\tau) \quad (3.4a,b,c)$$

dönüşümlerini (Bkz. Şekil 3.1) ve

$$du = i \sin(\theta - i\tau) d\tau \quad (3.5)$$

$$\lambda = \sqrt{1 - u^2} = \sin(\theta - i\tau) \quad (3.6)$$

olduğunu göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned} \psi_1(R, \theta) &\sim -\frac{i}{2\pi} \int_L \frac{\Phi_1^+(\cos(\theta - i\tau))}{H(Z_2, \cos(\theta - i\tau))} \sqrt{\frac{2}{\pi\omega R \sin(\theta - i\tau) \sin \theta}} \\ &\quad \times \exp(-i\omega R \cosh(\tau) + i\pi/4) \sin(\theta - i\tau) d\tau \quad (3.7) \end{aligned}$$

integraline ulaşırız. Bu integralin,

$$q(\tau) = -i \cosh \tau \quad , \quad q'(\tau) = -i \sinh \tau \quad , \quad q'(0) = 0 \quad , \quad \tau_s = 0 \quad (3.8a,b,c,d)$$

semer noktası tekniğiyle asimptotik ifadesi aşağıdaki gibidir [10].

$$\psi_1(R, \theta) \sim D(\theta) \frac{\exp(-i\omega R)}{\omega R} \quad (3.9)$$

Burada,

$$D(\theta) = -\frac{i}{\pi} \frac{\Phi_1^+(\cos \theta)}{H(Z_2, \cos \theta)} \quad (3.10)$$

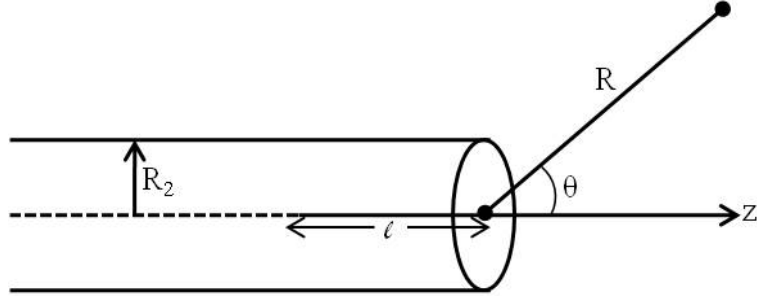
dır. $h < r < 1$ bölgesinde toplam alan,

$$\psi_2(r, z) = \frac{\omega}{2\pi} \int_L [B(u) J_0(\lambda\omega r) + C(u) Y_0(\lambda\omega r)] e^{-i\omega uz} du \quad (3.11)$$

burada (2.19a),(2.19b) ve (2.20a) dan,

$$\psi_2(r, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_L e^{i\omega ul} \Phi_1^+(u) \frac{H_0^{(2)}(\lambda\omega r)}{H(Z_2, u)} e^{-i\omega uz} du \quad (3.12)$$

sonucuna ulaşırız.



Şekil 3.1 Küresel Koordinatlar

4 SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde, silindirik borunun dış yüzeyindeki akustik yutucu kaplamanın etkisini görebilmek için farklı frekanslarda uzak alan hesabı yapılmıştır. Problemin parametre değerleri Demir ve Rienstra [9] 'nın çalışmasından seçilmiştir. Bu değerler şu şekildedir:

$$R_1 = 0.1985 \text{ m}$$

$$R_2 = 0.1191 \text{ m}$$

$$h = R_2/R_1 = 0.6$$

$$c_0 = 340.17 \text{ m/s}$$

$$\rho_0 = 1.225 \text{ kg/m}^3$$

ve 4 farklı frekans için farklı empedans değerleri

$$f_1 = 1250 \text{ Hz} \quad , \quad \omega = 2\pi f_1 R_1 / c_0 = 4.58305 \quad , \quad Z_1 = 1 - 7.27i$$

$$f_2 = 3150 \text{ Hz} \quad , \quad \omega = 2\pi f_2 R_1 / c_0 = 11.54928 \quad , \quad Z_1 = 1 - 2.79i$$

$$f_3 = 4000 \text{ Hz} \quad , \quad \omega = 2\pi f_3 R_1 / c_0 = 14.66575 \quad , \quad Z_1 = 1 - 2.14i$$

$$f_4 = 8000 \text{ Hz} \quad , \quad \omega = 2\pi f_4 R_1 / c_0 = 29.33150 \quad , \quad Z_1 = 1 - 0.84i$$

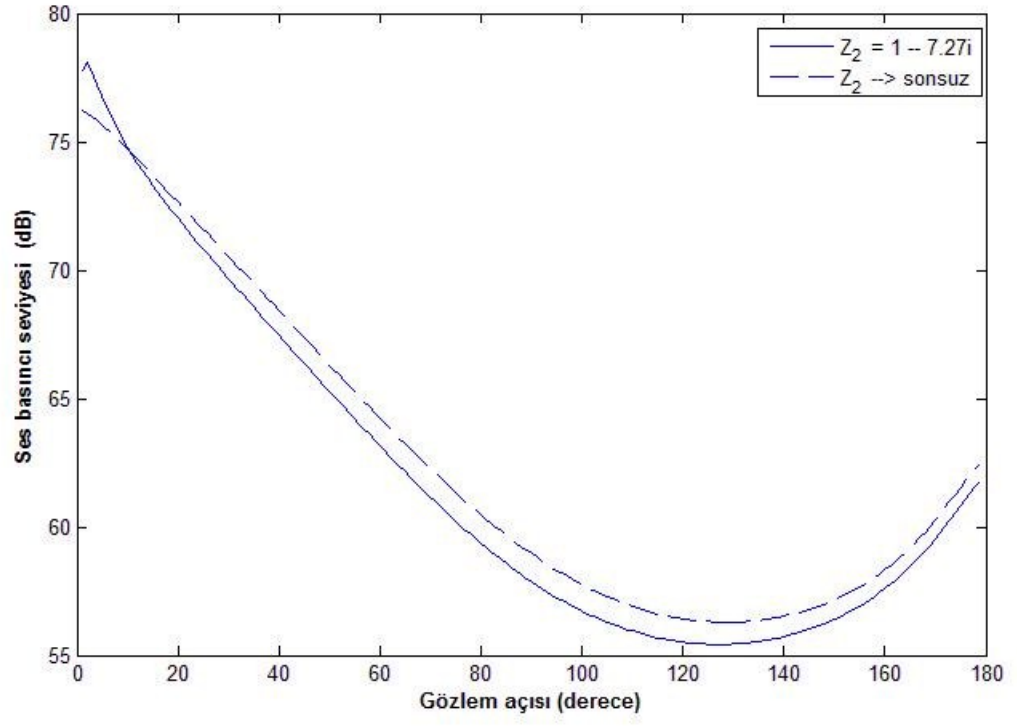
alınmıştır. Uzak alan ayırıtın 46 m uzaklıkta (3.9-3.10) ve

$$SPL = 20 \log_{10} \left(\frac{|p|}{2\sqrt{2}10^{-5}} \right)$$

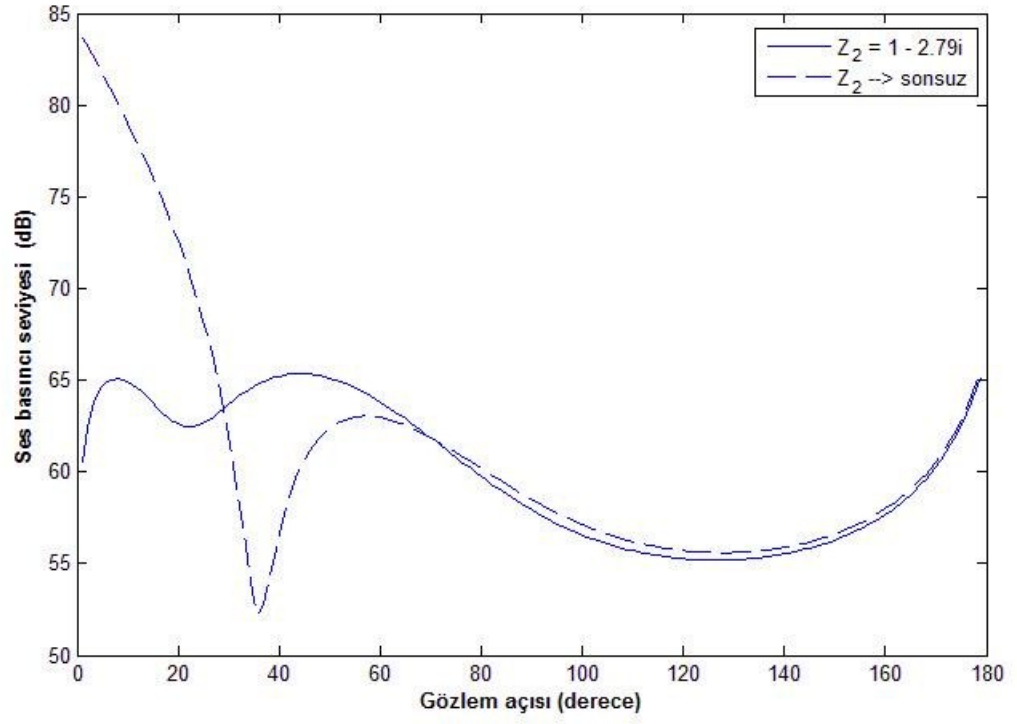
kullanılarak hesaplanmıştır.

Şekil 4.1 'den görüldüğü gibi düşük frekans ve nispeten yüksek empedans değeri için hemen hemen her gözlem açısında ses basıncı seviyesinde bir iki desibellik azalma görülmektedir. Şekil 4.2 ve Şekil 4.3 te ise biraz daha yüksek

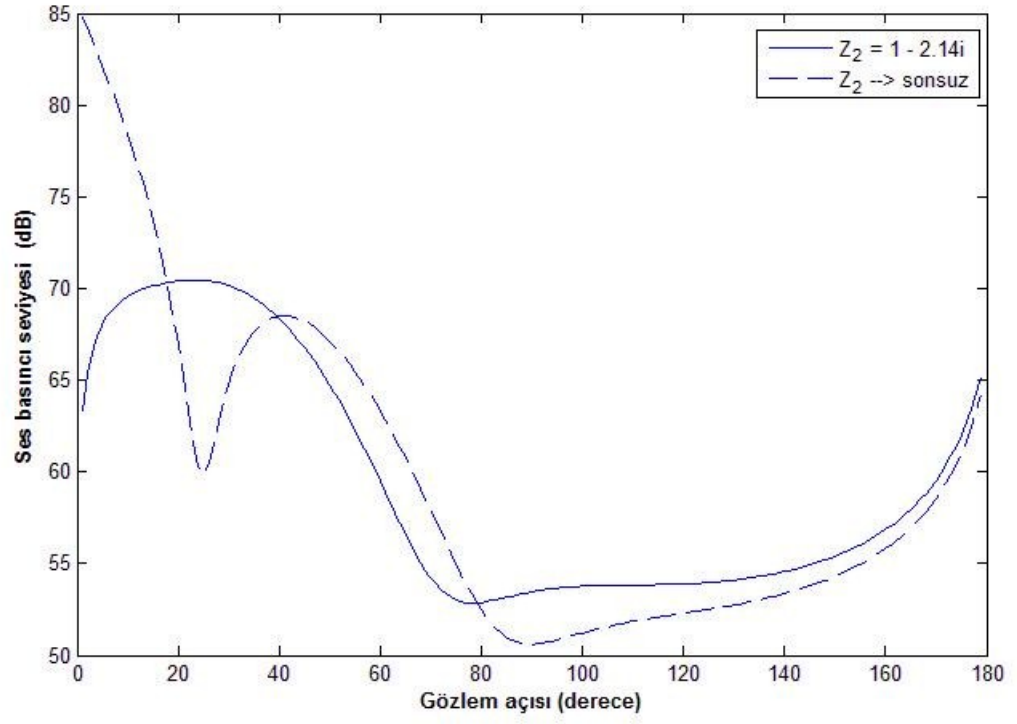
frekans değerleri ve ilkinine göre daha düşük empedans değerleri için özellikle ana ışıma bölgesinde ses basıncı seviyesinde azalma gözlemlenmektedir. Son Şekilde ise daha yüksek bir frekans değerinde empedansın yutucu etkisinin ana ışımanın küçük bir bölgesi haricinde kaybolduğunu görmekteyiz.



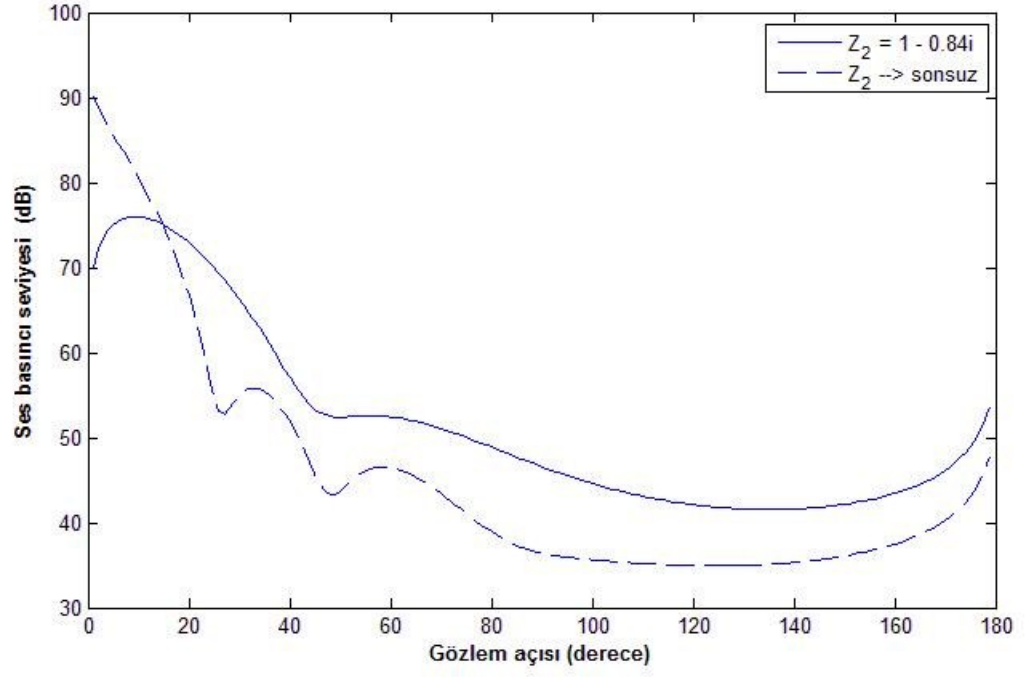
Şekil 4.1 f_1 frekansı için toplam alan



Şekil 4.2 f_2 frekansı için toplam alan



Şekil 4.3 f_3 frekansı için toplam alan



Şekil 4.4 f_4 frekansı için toplam alan

5 SONUÇLAR VE GELECEĞE YÖNELİK ÇALIŞMALAR

Bu tezde, ses dalgalarının dairesel kesitli yarı sonsuz, dış yüzeyi akustik yutucu malzemeyle kaplanmış bir borudan radyasyonu incelenmiştir. Problem θ yönündeki simetriden dolayı iki boyutlu olarak modellenmiş daha sonra Fourier dönüşümü, sınır ve süreklilik koşulları uygulanarak Wiener-Hopf denklemine indirgenmiştir.

Bölüm-3 te semer noktası(saddle-point) yöntemi kullanılarak saçılan alan açık olarak ifade edilmiştir. 4. Bölümde ise akustik yutucu malzemenin uzak alana etkisi nümerik sonuçlar elde edilerek gözlemlenmiştir. Burada farklı frekans ve empedans değerleri için ses basıncındaki değişim incelenmiştir.

Bu çalışmada yapılan analizden yola çıkılarak, giriş bölümünde ifade ettiğimiz, asıl problemi daha kolay bir şekilde çözmek mümkündür. Bir sonraki çalışmada dairesel kesitli borunun içinde bulunduğu akışkan ortamın durağan olmadığı durum incelenebilir ve akustik yutucu malzeme ile akışkan arasındaki etkileşimin sesin radyasyonu üzerindeki etkileri ortaya çıkarılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- [1] P. M. Morse, *The Transmission of Sound Inside Pipes*, J. Acoust. Soc. Am. 11,205210.1939.
- [2] L. Cremer, *Theorie der Luftschall Dämpfung im Rechteckkanal Mitschluckender Wand und das sich dabei Ergebendehöchste Dämpfungs*, Acustica 3, 249263.1953.
- [3] A. H. Neyfeh, J. E. Kaiser & D. P. Telionis, *Acoustics of Aircraft EngineDuct Systems*, Am. Inst. Aeronaut. Astronaut. J. 13, 130153.1975.
- [4] A. D. Lapin, *Sound Attenuation in Waveguides*, Soviet Phys. Acoust. 21, 215222.1975.
- [5] A.D. Rawlins., *Radiation of sound from an unflanged rigid cylindrical duct with an acoustically absorbing internal surface*, Proc. Roy. Soc. Lond. A361,6591,1978.
- [6] R.M. Munt, *The interaction of sound with a subsonic jet issuing from a semi-infinite cylindrical pipe*, Journal of Fluid Mechanics, 83(4):609-640, 1977.
- [7] A. Demir and S.W. Rienstra, *Sound Radiation from an Annular Duct with Jet Flow and a Lined Centerbody*, AIAA 2006-2718 of the 12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Cambridge, MA, 8-10 May 2006
- [8] A. Demir and S.W. Rienstra, *Sound Radiation from a Buried Nozzle with Jet and Bypass Flow*, paper no. 449 at ICSV14, the Fourteenth International Congress on Sound and Vibration, Cairns, July 9-12, 2007.
- [9] A. Demir and S.W. Rienstra, *Sound Radiation from a Lined Exhaust Duct with Lined Afterbody*, paper AIAA-2010-3947 of the 16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 7-9 June 2010, Stockholm, Sweden.

- [10] A. Büyükaksoy, G. Uzgören, *Kırınım Problemleri*, GYTE Yayınları, 1999.
- [11] A.D. Rawlins, *A bifurcated circular waveguide problem*, IMA J. Appl. Math. vol.54 pp. 59–81, 1995.
- [12] S.W. Rienstra and N. Peake, *Modal Scattering at an Impedance Transition in a Lined Flow Duct*, AIAA 2005-2852 of the 11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Monterey, CA, 23-25 May 2005.
- [13] B. Noble, *Methods Based On The Wiener-Hopf Technique For The Solution Partial Differential Equation*, Pergamon Press, New York, 1958.
- [14] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook Of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Washington D. C : U.S. Dept. of Commerce, 1972.

Ek 1 Çekirdek Fonksiyonlarının Faktorisasyonu

Bu bölümde,

$$L(u) = -\frac{J(Z_2, u)}{\lambda J_1(\lambda \omega h)} = L_+(u)L_-(u) \quad (\text{E1.1})$$

ve

$$M(u) = -\left\{ \frac{J_0(\lambda \omega h)}{J(Z_2, u)} - \frac{H_0^{(2)}(\lambda \omega h)}{H(Z_2, u)} \right\} = \frac{M_+(u)}{M_-(u)} \quad (\text{E1.2})$$

fonksiyonlarının faktorisasyonu incelenecektir.

$$L(u) = \frac{iJ_0(\lambda \omega h)/Z_2 + \lambda J_1(\lambda \omega h)}{\lambda J_1(\lambda \omega h)} = 1 + \frac{iJ_0(\lambda \omega h)/Z_2}{\lambda J_1(\lambda \omega h)} \quad (\text{E1.3})$$

dir. $L(u)$, dallanma tekilliğine sahip olmayan sadece basit sıfırları ve basit kutupları olan meramorfik bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun faktorisasyonu:

$$L_+(u) = \left\{ \frac{iJ_0(\omega h)/Z_2 + J_1(\omega h)}{J_1(\omega h)} \right\}^{1/2} \prod_{p=1}^{\infty} \frac{(1 + u/\xi_p^-) e^{-u/\xi_p^-}}{(1 + u/\varkappa_p^-) e^{-u/\varkappa_p^-}} \quad (\text{E1.4})$$

olarak bulunur [11]. Ayrıca,

$$L_+(u) = L_-(-u) \quad (\text{E1.5})$$

dur ve gösterilebilir ki kendi analitiklik bölgelerinde $|u| \rightarrow \infty$ iken,

$$L_+(u) = L_-(u) = \mathcal{O}(1) \quad (\text{E1.6})$$

şeklindedir. Burada \varkappa_p^- ve ξ_p^- sırasıyla aşağıdaki denklemlerin kökleridir.

$$\sqrt{1 - (\varkappa_p^-)^2} J_1\left(\sqrt{1 - (\varkappa_p^-)^2} \omega h\right) = 0 \quad , \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{E1.7a})$$

$$iJ_0\left(\sqrt{1 - (\xi_p^-)^2} \omega h\right) / Z_2 + \sqrt{1 - (\xi_p^-)^2} J_1\left(\sqrt{1 - (\xi_p^-)^2} \omega h\right) = 0 \quad , \quad p = 1, 2, \dots \quad (\text{E1.7b})$$

Bilindiği üzere Bessel fonksiyonları,

$$J_n(z) \simeq \left(\frac{1}{2}\pi z\right)^{-1/2} \cos\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad |z| \rightarrow \infty \quad (\text{E1.8})$$

olarak davranır. $j_{n\eta}$, n yinci mertebeden birinci tip Bessel fonksiyonu $J_n(z)$ in η nüncü basit sıfırını göstermek üzere şu asimptotik davranışa sahiptir.

$$j_{n\eta} \simeq \eta\pi + \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi + \mathcal{O}(\eta^{-1}) \quad , \quad \eta \rightarrow \infty \quad (\text{E1.9})$$

O halde,

$$\kappa_p^- \simeq p \frac{i\pi}{\omega h} + \frac{i\pi}{4\omega h} + \mathcal{O}(p^{-1}) \quad , \quad p \rightarrow \infty \quad (\text{E1.10})$$

ve

$$\xi_p^- \sim \kappa_p^- \quad (\text{E1.11})$$

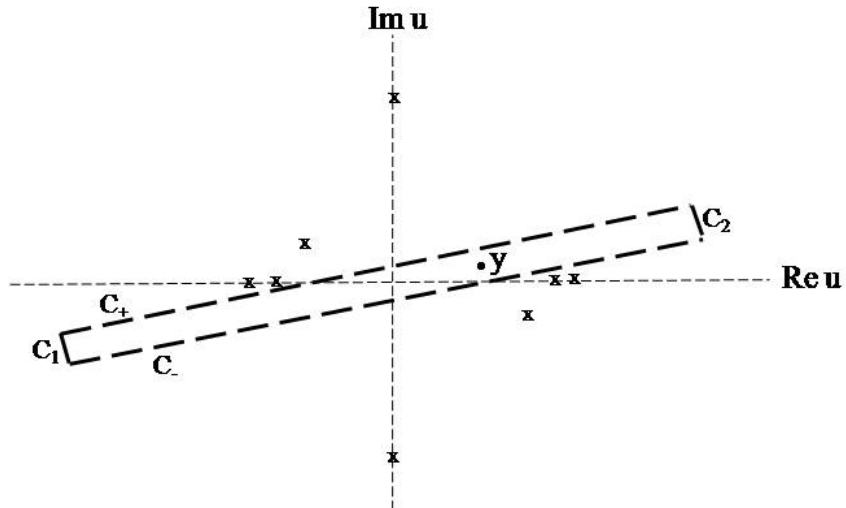
biçimindedir. $M(u)$ fonksiyonu için $|u| \rightarrow \infty$ iken,

$$M(u) = \mathcal{O}(u^{-1}) \quad , \quad M_+(u) = M_-(-u) \quad (\text{E1.12a,b})$$

ve

$$M_+(u) = \mathcal{O}(u^{-1/2}) \quad , \quad M_-(u) = \mathcal{O}(u^{1/2}) \quad (\text{E1.13a,b})$$

dir.



Şekil E1.1 $M(u)$ 'nin integrasyon konturu

C bölgesini C_1, C_+, C_2 ve C_- ile oluşturup, C 'nin kuşattığı bölgenin içinde y noktası alalım. C 'nin pozitif yönde alınmış olması durumunda,

$$\ln M(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\ln M(u)}{u-y} du \quad (\text{E1.14})$$

elde edilir. C 'nin uçları sonsuza götürülürse uçlardan gelen katkı yok olur.

Dolayısıyla,

$$\ln M(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} \frac{\ln M(u)}{u-y} du - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{\ln M(u)}{u-y} du \quad (\text{E1.15})$$

dur. O halde,

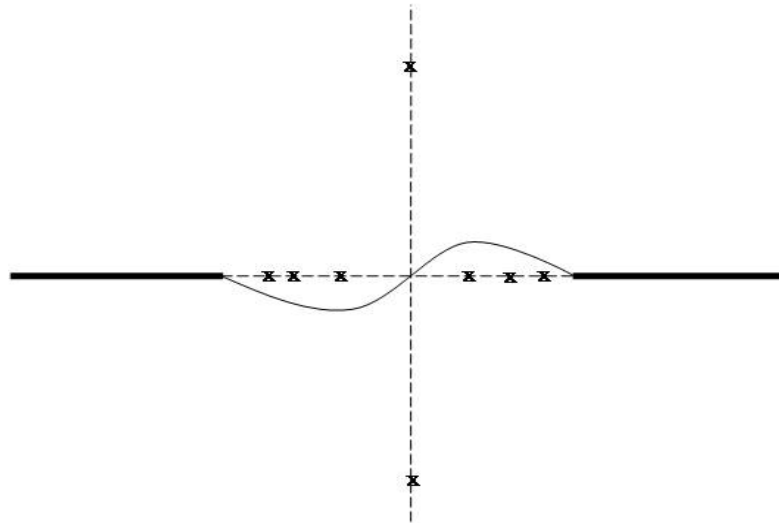
$$M_+(y) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} \frac{\ln M(u)}{u-y} du \right\} \quad (\text{E1.16a})$$

$$M_-(y) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{\ln M(u)}{u-y} du \right\} \quad (\text{E1.16b})$$

olarak tanımlayabiliriz.

M_{\pm} İfadesinin Nümerik Hesabı

[12] den,



Şekil E1.2 Kompleks u -düzlemindeki düzgün eğri

$$u = \zeta(t) \quad , \quad \zeta(t) = t + id \frac{4t/q}{3 + (t/q)^4} \quad , \quad 0 \leq t < \infty. \quad (\text{E1.17})$$

$$t = \eta(s) \quad , \quad \eta(s) = \frac{s}{(1-s)^2} \quad , \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (\text{E1.18})$$

dönüşümlerimden,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{\ln M(u)}{u-y} du = \int_0^1 h(s, y) \zeta'(\eta(s)) \eta'(s) ds \quad (\text{E1.19})$$

elde edilir. Burada d ve q oluşturulan konturun sırasıyla yükseklik ve genişliğidir.

Ayrıca,

$$h(s, y) = f(\zeta(\eta(s)), y) + f(-\zeta(\eta(s)), y) \quad (\text{E1.20a})$$

$$f(u, y) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\ln M(u)}{u-y} \quad (\text{E1.20b})$$

dir.

$$M_s(y) = \exp \left\{ \int_0^1 h(s, y) \zeta'(\eta(s)) \eta'(s) ds \right\} \quad (\text{E1.21})$$

olarak tanımlarsak,

$$M_+(y) = \begin{cases} M_s(y) & \text{Im}(y) > 0 \text{ veya } \text{Im } y = 0 \text{ ve } \text{Re } y < 0 \\ M_s(y)M(y) & \text{diğer halde} \end{cases} \quad (\text{E1.22a})$$

$$M_-(y) = \begin{cases} M_s(y) & \text{Im}(y) < 0 \text{ veya } \text{Im } y = 0 \text{ ve } \text{Re } y > 0 \\ M_s(y)/M(y) & \text{diğer halde} \end{cases} \quad (\text{E1.22b})$$

ifadelerini elde ederiz.

Ek 2 Q(u) Fonksiyonunun Dekompozisyonu

Bu bölümde,

$$Q(u) = R_-(u) \Phi_+(u) = Q_+(u) + Q_-(u) \quad (\text{E2.1a})$$

fonksiyonunun dekompozisyonu incelenecektir. Burada,

$$R_-(u) = \frac{Z_2}{i} e^{-i\omega u l} M_-(u) \quad (\text{E2.1b})$$

dur. Önceki çalışmadan,

$$\begin{aligned} \Phi_+(u) &= N_+(u) X_1(u) + \frac{2iG_+(u)}{\pi\omega h Z_2 [J(Z_1, u)Y(Z_2, u) - Y(Z_1, u)J(Z_2, u)]} \\ G_+(u) &= \frac{1}{L_+(u)} X_2(u) + \frac{i\omega F_+(u) [J(Z_1, u)Y(Z_2, u) - Y(Z_1, u)J(Z_2, u)]}{\lambda [Y_1(\lambda\omega) J(Z_2, u) - J_1(\lambda\omega) Y(Z_2, u)]} \\ F_+(u) &= \frac{1}{\omega K_+(u)} X_3(u) \end{aligned} \quad (\text{E2.2a,b,c})$$

$$\begin{aligned} N(u) &= \lambda \frac{Y(Z_1, u)J_1(\lambda\omega h) - J(Z_1, u)Y_1(\lambda\omega h)}{J(Z_1, u)Y(Z_2, u) - Y(Z_1, u)J(Z_2, u)} \\ L(u) &= \lambda \frac{Y_1(\lambda\omega) J(Z_2, u) - J_1(\lambda\omega) Y(Z_2, u)}{J(Z_1, u)Y(Z_2, u) - Y(Z_1, u)J(Z_2, u)} \end{aligned} \quad (\text{E2.3a,b,c})$$

$$K(u) = \frac{J_0(\lambda\omega) Y(Z_2, u) - Y_0(\lambda\omega) J(Z_2, u)}{\lambda [Y_1(\lambda\omega) J(Z_2, u) - J_1(\lambda\omega) Y(Z_2, u)]} + \frac{H_0^{(2)}(\lambda\omega)}{\lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega)}$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^+}{u - \sigma_p^-} - \frac{\psi_n(h)}{Z_2 N_-(\mu_n^+) (u - \mu_n^+)} = X_1(u) \quad (\text{E2.4a})$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^-}{u - \sigma_p^+} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{c_p^+}{u - \kappa_p^-} = X_2(u) \quad , \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{c_p^-}{u - \kappa_p^+} = X_3(u) \quad (\text{E2.4b,c})$$

dur. O halde,

$$\begin{aligned} \Phi_+(u) &= N_+(u) X_1(u) + \frac{2iX_2(u)}{\pi\omega h Z_2 L_+(u) [J(Z_1, u)Y(Z_2, u) - Y(Z_1, u)J(Z_2, u)]} \\ &\quad - \frac{2X_3(u)}{\pi\omega h Z_2 \lambda K_+(u) [Y_1(\lambda\omega) J(Z_2, u) - J_1(\lambda\omega) Y(Z_2, u)]} \end{aligned} \quad (\text{E2.5})$$

elde edilir. Burada,

$$N_+(u) = N(u) N_-(u) , L_+(u) = L(u) L_-(u) , K_+(u) = K(u) K_-(u) \quad (\text{E2.6a,b,c})$$

dur. O halde,

$$\begin{aligned} \Phi_+(u) &= N(u) N_-(u) X_1(u) \\ &+ \frac{2iX_2(u)}{\pi\omega h Z_2 \lambda L_-(u) [Y_1(\lambda\omega) J(Z_2, u) - J_1(\lambda\omega) Y(Z_2, u)]} \\ &+ \frac{\lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(u)}{h Z_2 K_-(u) H(Z_2, u)} \quad (\text{E2.7}) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} Q(u) &= R_-(u) N_-(u) X_1(u) N(u) \\ &+ \frac{R_-(u) 2iX_2(u)}{\pi\omega h Z_2 \lambda L_-(u) [Y_1(\lambda\omega) J(Z_2, u) - J_1(\lambda\omega) Y(Z_2, u)]} \\ &+ \frac{R_-(u) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(u)}{h Z_2 K_-(u) H(Z_2, u)} \quad (\text{E2.8}) \end{aligned}$$

biçimindedir. Cauchy Teoremi uyarınca,

$$\begin{aligned} Q_+(u) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{R_-(\tau) N_-(\tau) N(\tau) X_1(\tau)}{\tau - u} d\tau \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{R_-(\tau) 2iX_2(\tau)}{\pi\omega h Z_2 \lambda L_-(\tau) [Y_1(\lambda\omega) J(Z_2, \tau) - J_1(\lambda\omega) Y(Z_2, \tau)] (\tau - u)} d\tau \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{R_-(\tau) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(\tau)}{h Z_2 K_-(\tau) H(Z_2, \tau) (\tau - u)} d\tau = I_1 + I_2 + I_3 \quad (\text{E2.9}) \end{aligned}$$

tür. Burada,

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{\lambda R_- (\tau) N_- (\tau) Y(Z_1, \tau) J_1 (\lambda \omega h) - J(Z_1, \tau) Y_1 (\lambda \omega h)}{(\tau - u) [J(Z_1, \tau) Y(Z_2, \tau) - Y(Z_1, \tau) J(Z_2, \tau)]} \times \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^+}{\tau - \sigma_p^-} - \frac{\psi_n (h)}{Z_2 N_- (\mu_n^+) (\tau - \mu_n^+)} \right) d\tau \quad (\text{E2.10})$$

dur. Bu integralin $\tau = \sigma_p^+$ da ve $\tau = \mu_n^+$ da kutup tekilliği var. O halde,

$$I_1 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e_p^-}{u - \sigma_p^+} \quad (\text{E2.11})$$

elde edilir. Burada,

$$e_p^- = \lambda R_- (\sigma_p^+) N_- (\sigma_p^+) \times \frac{Y(Z_1, \sigma_p^+) J_1 (\lambda \omega h) - J(Z_1, \sigma_p^+) Y_1 (\lambda \omega h)}{\frac{d}{du} [J(Z_1, u) Y(Z_2, u) - Y(Z_1, u) J(Z_2, u)]_{u=\sigma_p^+}} X_1 (\sigma_p^+) \quad (\text{E2.12a})$$

ve

$$X_1 (\sigma_p^+) = \frac{1}{N_- (\sigma_p^+)} \left\{ \Phi_- (\sigma_p^+) - \frac{\Psi_n (h)}{Z_2 (\sigma_p^+ - \mu_n^+)} \right\} \quad (\text{E2.12b})$$

dır.

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{R_- (\tau) 2i}{\pi \omega h Z_2 \lambda L_- (\tau) [Y_1 (\lambda \omega) J(Z_2, \tau) - J_1 (\lambda \omega) Y(Z_2, \tau)] (\tau - u)} \times \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^-}{\tau - \sigma_p^+} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{c_p^+}{\tau - \kappa_p^-} \right) d\tau \quad (\text{E2.13})$$

dur. $\tau = \kappa_p^+$ da ve $\tau = \sigma_p^+$ da kutup tekilliği var. O halde,

$$I_2 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p^-}{u - \kappa_p^+} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{g_p^-}{u - \sigma_p^+} \quad (\text{E2.14})$$

elde edilir. Burada,

$$f_p^- = \frac{2i R_- (\kappa_p^+) X_2 (\kappa_p^+)}{\pi \omega h Z_2 \lambda L_- (\kappa_p^+) \frac{d}{du} [Y_1 (\lambda \omega) J(Z_2, u) - J_1 (\lambda \omega) Y(Z_2, u)]_{u=\kappa_p^+}} \quad (\text{E2.15a})$$

$$X_2(\kappa_p^+) = L_-(\kappa_p^+) \left\{ F_-(\kappa_p^+) - \frac{\Psi_n'(1)}{i\omega(\kappa_p^+ - \mu_n^+)} \right\} - \frac{2iL_-(\kappa_p^+)}{\pi\omega Z_1 [J(Z_1, \kappa_p^+)Y(Z_2, \kappa_p^+) - Y(Z_1, \kappa_p^+)J(Z_2, \kappa_p^+)]} \times \left\{ \Phi_-(\kappa_p^+) - \frac{\Psi_n(h)}{Z_2(\kappa_p^+ - \mu_n^+)} \right\} \quad (\text{E2.15b})$$

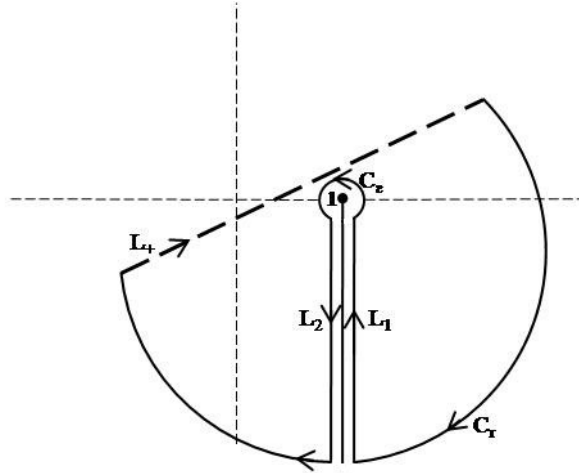
$$g_p^- = \frac{2iR_-(\sigma_p^+)}{\pi\omega h Z_2 \lambda L_-(\sigma_p^+) [Y_1(\lambda\omega)J(Z_2, \sigma_p^+) - J_1(\lambda\omega)Y(Z_2, \sigma_p^+)]} a_p^- \quad (\text{E2.15c})$$

$$a_p^- = -\frac{2iL_-(\sigma_p^+)}{\pi\omega Z_1 \frac{d}{du} [J(Z_1, u)Y(Z_2, u) - Y(Z_1, u)J(Z_2, u)]_{u=\sigma_p^+}} \times \left\{ \Phi_-(\sigma_p^+) - \frac{\Psi_n(h)}{Z_2(\sigma_p^+ - \mu_n^+)} \right\} \quad (\text{E2.15d})$$

dır.

$$I_3 = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{R_-(\tau) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(\tau)}{h Z_2 K_-(\tau) H(Z_2, \tau)} \frac{d\tau}{(\tau - u)} \quad (\text{E2.16})$$

integralinin ise $\tau = \kappa_p^+$ da kutup ve $\tau = 1$ de dallanma tekilliği vardır.



Şekil E2.1 Kesim çizgisi etrafında alınan integrasyon eğrisi

$$-1 + \tau = te^{-i\pi/2} \quad L_1 : \text{kesim çizgisinin sağında} \quad (\text{E2.17a})$$

$$-1 + \tau = te^{i3\pi/2} \quad L_2 : \text{kesim çizgisinin solunda} \quad (\text{E2.17b})$$

$$-1 + \tau = \varepsilon e^{i\theta} \quad C_\varepsilon : \text{dallanma noktası etrafında} \quad (\text{E2.17c})$$

$$-1 + \tau = re^{i\theta} \quad C_r : \text{yarım dairede} \quad (\text{E2.17d})$$

$L_+, C_r, L_1, C_\varepsilon, L_2$ kapalı eğrisi negatif yönlü ve

$$f(\tau) = \frac{R_-(\tau) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(\tau)}{hZ_2 K_-(\tau) H(Z_2, \tau) (\tau - u)} \quad (\text{E2.18})$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} f(\tau) d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(\tau) d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} f(\tau) d\tau \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} f(\tau) d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} f(\tau) d\tau = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h_p^-}{u - \kappa_p^+} \quad (\text{E2.19}) \end{aligned}$$

dır. Burada,

$$h_p^- = \frac{R_-(\kappa_p^+) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega)}{hZ_2 K_-(\kappa_p^+) H(Z_2, \kappa_p^+)} c_p^- \quad (\text{E2.20a})$$

$$\begin{aligned} c_p^- &= \frac{2iK_-(\kappa_p^+)}{\pi\lambda\omega \frac{d}{du} [Y_1(\lambda\omega) J(Z_2, u) - J_1(\lambda\omega) Y(Z_2, u)]_{u=\kappa_p^+}} \\ & \times \left[-\frac{J(Z_2, u)}{\lambda J_1(\lambda\omega)} \left\{ F_-(\kappa_p^+) - \frac{\Psi'_n(1)}{i\omega(\kappa_p^+ - \mu_n^+)} \right\} - \left\{ \Phi_-(\kappa_p^+) - \frac{\Psi_n(h)}{Z_2(\kappa_p^+ - \mu_n^+)} \right\} \right] \quad (\text{E2.20b}) \end{aligned}$$

biçimindedir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{R_-(\tau) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(\tau)}{hZ_2 K_-(\tau) H(Z_2, \tau) (\tau - u)} d\tau = \\ & \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\pi} \frac{R_-(1 + re^{i\theta}) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(1 + re^{i\theta})}{hZ_2 K_-(1 + re^{i\theta}) H(Z_2, 1 + re^{i\theta})} \frac{ire^{i\theta} d\theta}{(1 + re^{i\theta} - u)} \longrightarrow 0, \quad (r \longrightarrow \infty) \quad (\text{E2.21a}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{R_-(\tau) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(\tau)}{hZ_2 K_-(\tau) H(Z_2, \tau) (\tau - u)} d\tau = \\ & \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{R_-(1 + \varepsilon e^{i\theta}) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(1 + \varepsilon e^{i\theta})}{hZ_2 K_-(1 + \varepsilon e^{i\theta}) H(Z_2, 1 + \varepsilon e^{i\theta})} \frac{i\varepsilon e^{i\theta} d\theta}{(1 + \varepsilon e^{i\theta} - u)} \longrightarrow 0, (\varepsilon \longrightarrow 0) \end{aligned} \quad (\text{E2.21b})$$

olarak bulunur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{R_-(\tau) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(\tau)}{hZ_2 K_-(\tau) H(Z_2, \tau) (\tau - u)} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{R_-(\tau) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(\tau)}{hZ_2 K_-(\tau) H(Z_2, \tau) (\tau - u)} d\tau \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{R_-(\tau) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(\tau)}{hZ_2 K_-(\tau) H(Z_2, \tau) (\tau - u)} d\tau = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h_p^-}{u - \kappa_p^+} \end{aligned} \quad (\text{E2.22})$$

elde edilir. Ayrıca,

$$H_0^{(2)}(-\lambda\omega h) = H_0^{(2)}(\lambda\omega h) + 2J_0(\lambda\omega h) \quad (\text{E2.23a})$$

$$(-\lambda)H_1^{(2)}(-\lambda\omega h) = \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega h) + 2\lambda J_1(\lambda\omega h) \quad (\text{E2.23b})$$

dır [14] ve

$$\lambda(\tau) = \sqrt{(1-\tau)(1+\tau)} = \sqrt{t(t+2i)} \quad (\text{E2.24})$$

ifadesinden,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{R_-(\tau) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(\tau)}{hZ_2 K_-(\tau) H(Z_2, \tau) (\tau - u)} d\tau = \\ & \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{[\lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) + 2\lambda J_1(\lambda\omega)] R_-(1-it) X_3(1-it)}{hZ_2 K_-(1-it) [2J(Z_2, 1-it) + H(Z_2, 1-it)]} \frac{(-idt)}{(1-it-u)} \end{aligned} \quad (\text{E2.25})$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{R_-(\tau) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(\tau)}{hZ_2 K_-(\tau) H(Z_2, \tau) (\tau - u)} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{R_-(\tau) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(\tau)}{hZ_2 K_-(\tau) H(Z_2, \tau) (\tau - u)} d\tau = \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{g(t)}{(1 - it - u)} dt \quad (\text{E2.26}) \end{aligned}$$

bulunur. Burada,

$$\begin{aligned} g(t) = \frac{iR_-(1 - it) X_3(1 - it)}{hZ_2 K_-(1 - it)} \\ \times \frac{2\lambda \left[J_1(\lambda\omega) H(Z_2, 1 - it) - H_1^{(2)}(\lambda\omega) J(Z_2, 1 - it) \right]}{H(Z_2, 1 - it) [2J(Z_2, 1 - it) + H(Z_2, 1 - it)]} \quad (\text{E2.27}) \end{aligned}$$

dir. O halde,

$$I_3 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h_p^-}{u - \kappa_p^+} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{g(t)}{(1 - it - u)} dt \quad (\text{E2.28})$$

elde edilir. Bu durumda

$$Q_+(u) = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{g(t)}{(1 - it - u)} dt \quad (\text{E2.29})$$

ve

$$Q_-(u) = R_-(u) \Phi_+(u) - \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{g(t)}{(1 - it - u)} dt \quad (\text{E2.30})$$

olarak bulunur.